U oba slučaja važi $s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$.

Ako $x \in F_n$, tada je $s_n = n$. Važi da je

$$f(x) \in [n, n+1) \ \text{ ili } f(x) \geq n+1.$$

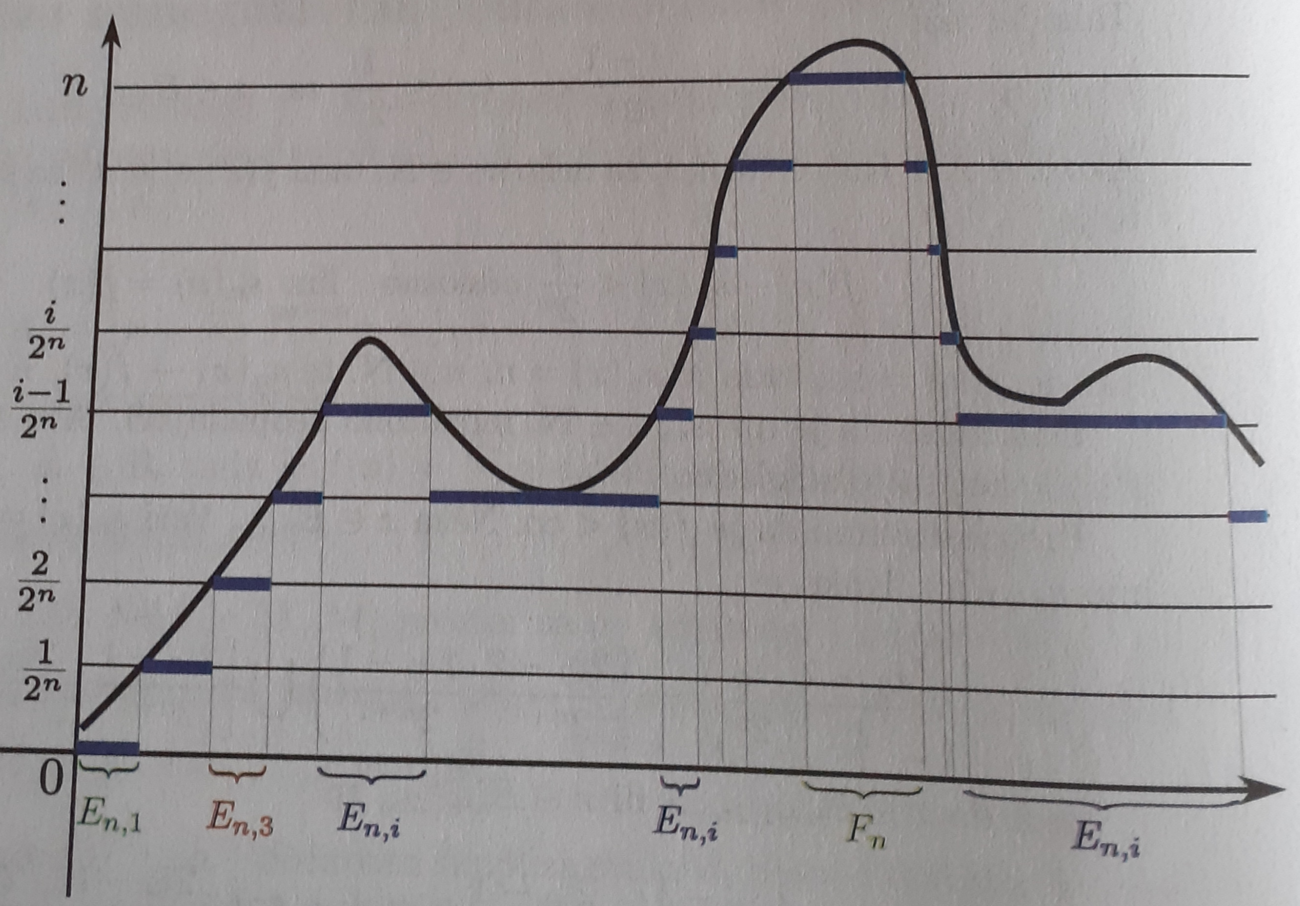
Za $f(x) \geq n+1$ je $s_{n+1}(x) = n+1$, te je $s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$. Za $f(x) \in [n, n+1)$ pokažimo da je $n \leq s_{n+1}(x) < n+1$. Kako

$$f(x) \in [n, n+1) = \bigcup_{j \in \{1,2,\ldots,2^{n+1}\}} \left[\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{j}{2^{n+1}}\right)$$

sledi

$$s_{n+1}(x) = \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{j-1}{2^{n+1}} \quad \text{za neko} \quad j \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}.$$

Dakle, $s_{n+1}(x) \in [n, n+1)$. Time je dokazano da je niz $s_n, n \in \mathbf{N}$, monotono neopadajući.



Dijagram 1.3: Aproksimacija merljive funkcije jednostavnom funkcijom.